מחלקות שקילות וחלוקות

# הגדרה

תהי קבוצה, אוסף (כאשר אינדקסים, ) של תתי קבוצות של A יקרא חלוקה של A אם מתקיים:

1. לכל מתקיים
2. לכל מתקיים

# דוגמאות

## 1

*חלוקה של A*

## 2

מהווה חלוקה של

## 3

, לכל : : מהווה חלוקה של

# הגדרה

תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R יקרא יחס שקילות(יח"ש) אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

## דוגמאות

*: יחס שקילות על A*

*יחס שקילות על A*

*יחס שקילות על A*

# הגדרה

תהיה קבוצה ויהי R יח"ש על A ויהי . מחלקת השקילות של A היא

מחלקת שקילות של a היא תת קבוצה של A שמכילה את כל האיברים בA שמתייחסים לa ביחס R

# דוגמאות:

*:*

# הערה

יהי R יח"ש על ויהי אזי

## הוכחה

R יח"ש בפרט רפלקסיבי לכן כלומר

# סימון

לעיתים נסמן במקום

# דוגמה

*(סימון: ⬄ קיים כך ש)*

*דוגמאות לאיברים ביחס:*

*היחס הזה נקרא*

## טענה

*הינו יחס שקילות על*

## הוכחה

רפלקסיבי: יהי , צ"ל ⬄ ⬄ . לכן לכן לכן

סימטרי: יהי כלומר כלומר קיים כך ש. ניקח את , ואז כלומר כלומר

טרנזיטיביות: יהיו . כלומר וגם כלומר קיים כך ש וגם קיים כך ש. ניקח . נחבר את המשוואות: כלומר כלומר

נמצא מחלקות שקילות:

רואים ש היא חלוקה של

# הערה בנוגע לסימון

יהי R יח"ש על . במקום ניתן לסמן או

# משפט

יהי R יח"ש על ויהיו . התנאים הבאים שקולים:

(1) (2) (3)

## הוכחה

נוכיח ש: יהי . לפי הגדרת מחלקת השקילות זה אומר ש וגם . צ"ל . לפי תכונת הסימטריות מתקיים ש. לפי תכונת הטרנזיטיביות מתקיים שאם אזי

נוכיח ש: יהי כלומר . נתון כלומר לפי הסימטריות ולכן לפי תכונת הטרנזיטיביות . אותו דבר בכיוון ההפוך, לכן

נוכיח ש: נתון . לפי הערה קודמת כלומר לכן

## מסקנה

יהי R יח"ש על ויהיו אזי או

# משפט

יהי R יחס שקילות על אזי קבוצת כל מחלקות השקילות, נקראת קבוצת המנה ותסומן (קוראים A מודולו R) מהווה חלוקה של A

## הוכחה

1) יהי , לכן

2) יהיו שתי מחלקות שקילות שונות כלומר . לפיה המסקנה מקודם זה אומר ש

3) יהי . מתקיים , לכן

## אומרים

יחס השקילות משרה חלוקה.

# רעיון

עבור חלוקה של A ⬄ x וy נמצאים באותה תת קבוצה (של החלוקה)

## דוגמה

, , . מהו יחס השקילות המושרה מן החלוקה?

למשל

# משפט

יהי ותהי S חלוקה של A כלומר אזי יח"ש על A, נקראת יחס השקילות המושרה מן החלוקה.

## הוכחה

רפלקסיביות: יהי , S חלוקה לכן קיים כך ש לכן ולכן

סימטריות: יהי (צ"ל ). כלומר כלומר . זה אומר ש לכן לכן

טרנזיטיביות: יהיו . כלומר וגם כלומר לכן . S חלוקה ולכן זה אומר ש ולכן ולכן כלומר

נבנה את כל החלוקות ולפיהן נבנה יחסי שקילות:

יחס הזהות

זה בעצם

מכיוון שיש 5 חלוקות יש גם 5 יחסי שקילות

יחס סדר

# הגדרה

תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R יקרא יחס סדר על A אם R הוא רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי.

# סימון

מקובל לסמן יחס סדר כ. אם R יחס סדר על A אומרים ש קס"ח(קבוצת סדר חלקית).

# הגדרה

תהי קס"ח. נאמר שR הוא יחס סדר מלא(/לינארי/קוי) אם לכל מתקיים או .

## דוגמאות

עבור

– יחס סדר לא מלא

– יחס סדר מלא

יחס סדר לא מלא

# הגדרות

תהי , קס"ח.

יקרא מינימלי אם לא קיים כך ש

יקרא מקסימלי אם לא קיים כך ש

*יקרא קטן ביותר אם לכל מתקיים*

*יקרא גדול ביותר אם לכל מתקיים*

## דוגמה:

מינימלי: 2,3,5,7,11…  
מקסימלי: אין  
קטן ביותר: אין  
גדול ביותר: אין

# תרגיל

מצא את האיברים לפי ההגדרות(אם קיימים) לפי הסדר "מחלק את", כלומר